EXERCICE N°1 : 35' 5 points

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}i\sin\theta$ et $z_B=-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}i\sin\theta$; $\theta\in]0,\pi[$

1°) a) Écrire les nombres complexes sous forme exponentielle.

b) Montrer que l'affixe du point I milieu de $[AB]$ est réel.

2°) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

b) Prouver que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})\equiv -2\theta\,[2\pi]$. Pour quelles valeurs de θ, le triangle OAB est rectangle en O ?

c) Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixes z vérifiant :

$$\left|z+\frac{\sqrt{2}}{4}-i\frac{\sqrt{2}}{4}\right|=\left|\overline{z}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right|$$

3°) On donne pour tout $n\in IN$: $V_n=(z_A)^n+(z_B)^n$

a) Montrer que V_n est un réel.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$: $|V_n|\le\frac{1}{2^{n-1}}$, en déduire que la suite V est convergente.

EXERCICE N°2 : 30' 4 points

Dans l'annexe ci-jointe $(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan et A un point du cercle de centre O et de rayon 2 tel que $(\vec{u},\overrightarrow{OA})\equiv\theta\,[2\pi]$ où $\theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par a l'affixe du point A.

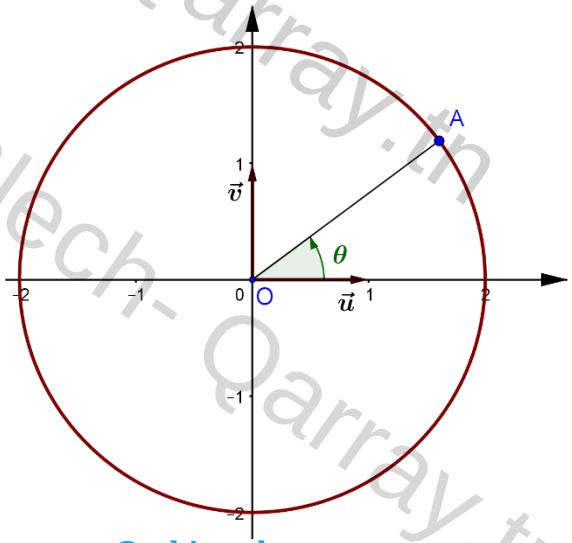
1°) Donner, à l'aide de θ, l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes :

$$a\ ;\ \frac{1}{a}\ ;\ -\frac{1}{\overline{a}}\ \text{ et }\ \frac{a^2}{\overline{a}}$$

2°) Construire sur l'annexe les points B, C et D d'affixes respectives $\frac{1}{a}$; $-\frac{1}{\overline{a}}$ et $\frac{a^2}{\overline{a}}$

3°) a) Vérifier que $\frac{z_C-z_A}{z_D}=-\frac{5}{4}e^{-2i\theta}$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les droites (AC) et (OD) sont perpendiculaires.



Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn - Qarray.tn